This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

Math 9108.92

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM

Giuseppe Peano.

15 June, 1892.

Digitized by Google

Offerto dall' Autore

33

GENERALIZZAZIONE

DELLA

FORMULA DI SIMPSON

NOTA

DI

GIUSEPPE PEANO

TORINO

CARLO CLAUSEN

Libraio della R. Accademia delle Scienze

1892

Digitized by Google

Digitized by Google

GENERALIZZAZIONE

DELLA

FORMULA DI SIMPSON

NOTA

DI

GIUSEPPE PEANO

TORINO
CARLO CLAUSEN
Libraio della R. Accademia delle Scienze
1892

Digitized by Google

Math 9108.92

HARVARD LIBRARY

The Author

Estr. dagli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. XXVII.
Adunanza del 27 Marzo 1892

Torino. — Stamperia Reale della Ditta G. B. Paravia e C.
502 (C 3) 22-IV-92

Digitized by Google

Fra le formule per le quadrature sono notevoli quella dei trapezii

$$(\alpha) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+R,$$

ove

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(u);$$

e quella di Simpson:

$$(\beta) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]+R$$

ove

$$R = -\frac{(b-a)^5}{4!\,5!} f^{IV}(u),$$

rappresentando costantemente con u un valore intermedio fra a e b (*). Il resto nella (α) è nullo, se $f(x)$ è intera di primo grado, e nella (β) il resto è nullo, se $f(x)$ è intera di grado non superiore al terzo.

(*) Pubblicai quell'espressione del resto della formola di Simpson nelle *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*, pag. 206.

Digitized by Google

Parallelamente a queste formule si hanno quelle di Gauss. L'analoga alla (β) è

$$(\beta') \quad \left\{ \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left[\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2}\right)\right] + R \right.$$

ove

$$R = -\frac{(b-a)^5}{180.4!} f^{\text{IV}}(u),$$

e il resto è nullo per le funzioni di grado non superiore al terzo.

Paragonando le formule (β) e (β'), che si possono considerare come egualmente approssimate, risulta che è più semplice, in generale, il calcolo dei tre valori $f(a)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f(b)$, che esige la formula (β), che il calcolo dei due

$$f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2}\right), f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{b-a}{2}\right)$$

che esige la formola (β'). Questo spiega il maggior uso della formula (β) di Simpson sulla corrispondente (β') di Gauss.

Le formule di Gauss costituiscono una successione infinita, mentrechè le formule dei trapezii e di Simpson erano finora isolate. Io mi propongo di esporre qui una successione di infinite formule di quadrature, di cui le due prime sono appunto la (α) e la (β).

Per semplicità supporremo i limiti dell'integrale eguali a -1 e $+1$; poichè basta fare il cambiamento

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x',$$

onde ridurci a questo caso.

La questione che ci proponiamo è questa: Determinare gli

Digitized by Google

$n+1$ coefficienti A_0, A_1, ... A_n, e gli $n-1$ valori $x_1\ x_2 \ldots x_{n-1}$ compresi fra -1 e $+1$ in guisa che la formula

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = A_0 f(-1) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots \\ + A_{n-1} f(x_{n-1}) + A_n f(1) \end{aligned} \right.$$

sussista, qualunque sia la funzione $f(x)$ intera di grado $2n-1$.

La soluzione è la seguente. Pongasi.

$$(2)\qquad Y_n = \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2-1)^n.$$

Avendo la funzione $(x^2-1)^n$ le radici -1 ed 1 multiple d'ordine n, la sua derivata $(n-1)^{ma}$, Y_n, avrà le radici $x_0=-1$, $x_n=1$, semplici, ed $n-1$ radici $x_1\ x_2 \ldots x_{n-1}$ distinte e comprese fra -1 e $+1$. Si calcolino i coefficienti A_0, A_1, ... colla formola

$$(3)\quad A_r = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots(x-x_n)}{(x_r-x_0)\ldots(x_r-x_{n-1})(x_r-x_{r+1})\ldots(x_r-x_n)}\,dx.$$

Allora sussisterà la formula (1).

Infatti, si divida la $f(x)$, funzione intera di grado $2n-1$, per Y_n, di grado $n+1$; siano $\varphi(x)$ il quoziente, $\psi(x)$ il resto, onde:

$$(4)\qquad f(x) = \psi(x) + Y_n\,\varphi(x).$$

Sarà $\psi(x)$ di grado n, e $\varphi(x)$ di grado $n-2$. Attribuendo ad x gli $n+1$ valori x_0, x_1, ... x_n, per cui si annulla Y_n, si avrà

$$f(x_0) = \psi(x_0),\ f(x_1) = \psi(x_1),\ \ldots\ f(x_n) = \psi(x_n).$$

Quindi la funzione $\psi(x)$, intera, di grado n, di cui si conoscono i valori per $n+1$ valori della variabile, si può esprimere colla formola d'interpolazione di Lagrange:

$$(5)\quad \psi(x) = \sum_r \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{r-1})(x-x_{r+1})\ldots(x-x_n)}{(x_r-x_0)\ldots(x_r-x_{r-1})(x_r-x_{r+1})\ldots(x_r-x_n)}\,f(x_r)$$

Digitized by Google

Dalla (4) si ha:

$$(6) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \psi(x)\,dx + \int_{-1}^{+1} Y_n \varphi(x)\,dx$$

Ora, dalle (5) e (3), si ricava

$$(7) \qquad \int_{-1}^{+1} \psi(x)\,dx = \sum_r A_r f(x_r),$$

Riguardo al secondo integrale, coll'integrazione per parti si ha:

$$\int Y_n \varphi(x)\,dx = \int \varphi(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} (x^2-1)^n\,dx =$$

$$= \varphi(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} (x^2-1)^n - \varphi'(x) \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-3} (x^2-1)^n + \ldots$$

$$\pm \varphi^{(n-2)}(x) \,.\, (x^2-1)^n \mp \int \varphi^{(n-1)}(x)\,(x^2-1)^n\,dx.$$

Mettendo i limiti -1 e $+1$, tutti i termini integrati nel secondo membro si annullano, perchè contengono il fattore x^2-1; e siccome $\varphi(x)$ è di grado $n-2$, sarà $\varphi^{(n-1)}(x) = 0$, onde:

$$(8) \qquad \int_{-1}^{+1} Y_n \varphi(x)\,dx = 0$$

Sostituendo nella (6) ai due integrali del secondo membro i loro valori dati dalle (7) ed (8), si ha la formola (1) che si voleva dimostrare.

La formola (1), esatta se $f(x)$ è intera di grado $2n-1$, è approssimata se $f(x)$ è una funzione arbitraria. Per calcolare l'errore R, tale che si abbia:

$$(9) \qquad \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_r A_r f(x_r) + R,$$

Digitized by Google

si formi la funzione $F(x)$, intera, di grado $2n-1$, che soddisfa alle $2n$ condizioni:

$$F(x_0)=f(x_0)\,,\ F(x_1)=f(x_1)\,,\ F(x_2)=f(x_2)\,,$$
$$\ldots F(x_{n-1})=f(x_{n-1})\,,\ F(x_n)=f(x_n),$$
$$F'(x_1)=f'(x_1)\,,\ F'(x_2)=f'(x_2)\,,\ \ldots F'(x_{n-1})=f'(x_{n-1})\,,$$

Si avrà, com'è noto:

$$(10)\ f(x)=F(x)+(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_{n-1})^2(x-x_n)\frac{f^{(2n)}(u)}{(2n)!}$$

Integrando si avrà appunto $\int_{-1}^{+1}F(x)\,dx=\sum_r A_r f(x_r)$, onde

$$(11)\quad R=\int_{-1}^{+1}(x-x_0)(x-x_1)^2\ldots(x-x_{n-1})^2(x-x_n)\frac{f^{(2n)}(u)}{(2n)!}dx.$$

Portando fuori del segno integrale il fattore $\frac{f^{(2n)}(u)}{(2n)!}$, cosa lecita, poichè il fattore rimanente ha un segno costante nell'intervallo di integrazione, si ha:

$$(12)\quad R=\frac{f^{(2n)}(u)}{(2n)!}\int_{-1}^{+1}(x-x_0)(x-x_1)^2\ldots(x-x_{n-1})^2(x-x_n)\,dx.$$

Facendo $n=1$, si ha la formula dei trapezii (α).

Per $n=2$ si ha la formula di Simpson (β).

Per $n=3$, fatti i calcoli, si ha:

$$\int_{-1}^{+1}f(x)\,dx=\frac{1}{6}f(-1)+\frac{5}{6}f\left(-\sqrt{\frac{1}{5}}\right)+\frac{5}{6}f\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)+\frac{1}{6}f(1)+R,$$

ove

$$R=-\frac{2^5}{3.5^2.7.6!}f^{(6)}(u)\,,$$

e il resto è nullo per le funzioni di grado inferiore al 6°.

Digitized by Google

Per $n = 4$ si ha:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{10} f(-1) + \frac{49}{90} f\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \frac{32}{45} f(0) +$$

$$+ \frac{49}{90} f\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right) + \frac{1}{10} f(1) + R$$

ove

$$R = -\frac{f^{(8)}(u)}{2^2 . 3^4 . 5^2 . 7^3} = -\frac{f^{(8)}(u)}{2778300} .$$

Nota. — La stessa questione fu già trattata dal compianto D. Turazza, nel suo scritto: « *Intorno all'uso dei compartimenti diseguali nella ricerca del valore numerico di un dato integrale* » (Memorie I. R. Istituto Veneto, vol. V, 1855, pag. 277-298). Credo però nuove le espressioni di Y_n e dei resti.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Math 9108.92
Generalizzazione della formula di S
Cabot Science 003362260
3 2044 091 924 001

Math

Digitized by Google